# Zur einheitlichen Feldtheorie

Von G. Braunss

Mathematisches Institut der Technischen Hochschule Darmstadt

(Z. Naturforschg. **19 a**, 401—405 [1964]; eingegangen am 12. Dezember 1963)

The basic conception of this paper is the assumption, that all quantities characterizing the metric are functionals of *one* field (worldfield). For the sake of mathematical simplicity a scalar field $\Phi$ is considered. The investigations are based on the following system of field equations:

$$R_{mn} - \tfrac{1}{2}\, g_{mn}\, R = \tfrac{1}{2}\, g_{mn} [g^{ab}\, \Phi_{,a}\, \Phi_{,b} + F(\Phi)] - \Phi_{,m}\, \Phi_{,n};$$

$F$ is a functional of $\Phi$. According to the basic conception only such solutions for the $g_{mn}$ are permitted, which for $\Phi \equiv 0$ give the corresponding values of a euclidean metric. Due to the Bianchi-identities it follows as a consequence of the field equations, that $\Phi$ satisfies a nonlinear Klein–Gordon-equation:

$$g^{ab}\, \Phi_{;ab} - \tfrac{1}{2}\, (\mathrm{d}F/\mathrm{d}\Phi) = 0 .$$

The conditions for a nonsingular, static and centralsymmetrical solution are investigated. With regard to cosmological problems the equations for a conformal-flat, timedependent metric are discussed.

## 1. Die Feldgleichungen

Es wird angenommen, daß die vielen, scheinbar verschiedenen Felder auf ein einziges Feld (Weltfeld) zurückgeführt werden können [1]. Ferner wird angenommen, daß der Raum nichteuklidisch im Riemannschen Sinne, seine Struktur also durch die Komponenten des metrischen Fundamentaltensors und deren Ableitungen gegeben ist. Diese Größen – von der allgemeinen Relativitätstheorie als Gravitationspotentiale gedeutet [2] – werden hier als Funktionale des Weltfeldes aufgefaßt. Man wird das Weltfeld durch einen Spinor repräsentieren müssen; aus Gründen der einfacheren mathematischen Behandlung wird jedoch zunächst ein skalares Weltfeld $\Phi$ angenommen. Die Feldgleichungen sollen derart sein, daß aus ihnen das Feld sowie sämtliche Größen bestimmt werden können, die die Struktur des Raumes festlegen. Sie sollen ferner eine Gleichung enthalten, die für ein spinorielles Feld vom Typ einer nichtlinearen Dirac-Gleichung, im hier angenommenen Fall eines skalaren Feldes vom Typ einer nichtlinearen Klein-Gordon-Gleichung ist; eine solche Gleichung bildet offenbar einen wesentlichen Bestandteil einer Theorie der Elementarteilchen [3].

Für die Feldgleichungen machen wir den Einsteinschen Ansatz:

$$G_{mn}(\Phi)_{\text{def.}} = R_{mn} - \tfrac{1}{2} g_{mn}\, R = -T_{mn}(\Phi)\,; \qquad (1.1)$$

die Schreibweise $G(\Phi)$ und $T(\Phi)$ drückt die funktionale Abhängigkeit von $\Phi$ aus. Um der Forderung nach Existenz einer Klein-Gordon-Gleichung zu genügen, wird $T_{mn}(\Phi)$ die folgende Gestalt gegeben [4]:

$$T_{mn}(\Phi)_{\text{def.}} = -\tfrac{1}{2} g_{mn} [g^{ab}\, \Phi_{,a}\, \Phi_{,b} + F(\Phi)] + \Phi_{,m}\, \Phi_{,n}; \qquad (1.2)$$

$F(\Phi)$ ist ein zunächst unbekanntes Funktional von $\Phi$. Wegen des identischen Verschwindens der Divergenz von $G_{mn}$ (Bianchi-Identitäten), folgt aus dem Bestehen der Gln. (1.1) mit der Beziehung $F_{,n} = (\mathrm{d}F/\mathrm{d}\Phi)\, \Phi_{,n}$ die Gleichung

$$g^{ab}\, \Phi_{;ab} - \frac{1}{2}\, \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\Phi} = 0; \qquad (1.3)$$

das ist gerade die geforderte nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung [5].

Von den Lösungen des Gleichungssystems (1.1) werden voraussetzungsgemäß nur diejenigen partikulären Lösungen der $g_{mn}$ betrachtet, die für $\Phi \equiv 0$ in die entsprechenden Größen einer euklidischen Metrik übergehen.

[1] W. Heisenberg, Quantum Theory of Fields and Elementary Particles, Rev. Mod. Phys. **29**, 269 [1957].

[2] A. Einstein, The Meaning of Relativity, Princeton University Press, 1955.

[3] D. Iwanenko, Max-Planck-Festschrift 1958, Akademie-Verlag, Berlin, S. 353.

[4] Komma bezeichnet partielle, Semikolon kovariante Ableitungen; es gilt die Einsteinsche Summenkonvention. Das Linienelement hat die Signatur $+++-$. Die bei der Verknüpfung von $G_{mn}$ und $T_{mn}$ üblicherweise eingeführte Konstante $\varkappa$ ist hier gleich 1 gesetzt.

[5] Im Falle eines komplexen skalaren Feldes folgt aus den Gln. (1.1) auf Grund der Bianchi-Identitäten zugleich ein Erhaltungssatz für die Ladung.

## 2. Statisches zentralsymmetrisches Feld

Das Quadrat des Linienelementes kann in einem räumlich isotropen System bekanntlich in folgender Weise dargestellt werden [6]:

$$ds^2 = e^{\lambda}\,dr^2 + r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta\,d\varphi^2) - c^2 e^{\nu}\,dt^2\,; \tag{2.1}$$

$\lambda$ und $\nu$ sind Funktionen von $r$. Die Feldgleichungen nehmen dann nach SYNGE [6] folgende Gestalt an (Striche bezeichnen Ableitungen nach $r$):

$$r^2 G_1{}^1 = 1 - e^{-\lambda}(1 + r\nu') = -r^2 T_1{}^1, \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} -G_2{}^2 = -G_3{}^3 = T_2{}^2 = T_3{}^3 \\ = \tfrac{1}{2} r\, T_1{}^{1\prime} + (1 + \tfrac{1}{4} r\nu')\, T_1{}^1 - \tfrac{1}{4} r\nu'\, T_4{}^4, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$r^2 G_4{}^4 = 1 - e^{-\lambda}(1 - r\lambda') = -r^2 T_4{}^4. \tag{2.4}$$

Unter Vernachlässigung einer partikulären, im Nullpunkt singulären Lösung für $\lambda$ (SCHWARZSCHILDsche Lösung) folgt aus der ersten und dritten Gleichung

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{e^{-f}}{2r}\int_0^r (\Phi'^2 + F)\, r^2 e^f\, dr\,, \quad f = \tfrac{1}{2}\int_0^r \Phi'^2\, r\, dr\,, \tag{2.5}$$

$$\nu = -\lambda + \int_\infty^r \Phi'^2\, r\, dr\,. \tag{2.6}$$

Die zweite Gleichung liefert die KLEIN-GORDON-Gleichung

$$\Phi'' + \Phi'\left(\frac{2}{r} + \frac{\nu' - \lambda'}{2}\right) - \frac{1}{2} e^{\lambda} \frac{dF}{d\Phi} = 0\,. \tag{2.7}$$

$\Phi$ und damit auch $\lambda$ und $\nu$ sollen für $r \to \infty$ verschwinden. Die Randbedingungen für $\lambda$ und $\nu$ sind erfüllt, wenn die Integrale

$$\int_0^\infty (\Phi'^2 + F)\, r^2\, dr; \quad \int_0^\infty \Phi'^2\, r\, dr\,, \tag{2.8}$$

existieren. Das ist offenbar der Fall, wenn $\Phi'^2$ und $F$ beschränkt sind und mindestens wie $r^{-4}$ verschwinden, falls man sich auf ganzzahlige Potenzen beschränkt.

Für die Größe $F$, die nach Voraussetzung ein Funktional von $\Phi$ ist, im wesentlichen also die Wechselwirkung des Feldes mit sich beschreibt, wird folgender Ansatz gemacht:

$$F = \tfrac{1}{2} q_1\, \Phi^4 + \tfrac{1}{3} q_2\, \Phi^6 + \dots\,. \tag{2.9}$$

Die geradzahligen Potenzen lassen sich damit begründen, daß $\Phi^2$ für komplexe Werte durch $\bar{\Phi}\,\Phi$ ersetzt wird; $\bar{\Phi}$ ist der zu $\Phi$ konjugiert komplexe Wert. Die niedrigste Potenz ist von der Ordnung 4, damit in dem Ausdruck $dF/d\Phi$, der in der KLEIN-GORDON-Gleichung auftritt, der Term mit der niedrigsten Potenz bereits nichtlinear ist; die $q_n$ sind Konstanten.

Es sei nun angenommen, für $\Phi$ existiere eine Lösung, die im Nullpunkt ihr Maximum, $\Phi_{\text{Max}} = 1$, erreicht und für wachsende $r$ monoton gegen Null strebt. Das heißt, die höheren Potenzen in $F$ treten für kleine $r$ am stärksten in Erscheinung, die Wechselwirkung wird für große $r$ schwächer. In der Umgebung des Nullpunktes gilt dann

$$\Phi = 1 + A\, r^2 + \dots\,. \tag{2.10}$$

Für die Konstante $A$, die nach Voraussetzung negativ ist, folgt durch Koeffizientenvergleich

$$6\,A = \sum q_n < 0\,. \tag{2.11}$$

Fordert man für $r \to 0$ eine positive Energiedichte, $\varrho = -T_4^4 = \frac{1}{2}(e^{-\lambda}\,\Phi'^2 + F)$, so muß

$$F(\Phi_{\text{Max}}) = \sum \frac{q_n}{n+1} > 0 \tag{2.12}$$

sein. Für die $q_n$ gelten also die Forderungen

$$\sum q_n < 0\,, \; \sum \frac{q_n}{n+1} > 0\,. \tag{2.13}$$

Das bedeutet, daß man mit einem nichtlinearen Glied nicht auskommt; es müssen mindestens zwei der Koeffizienten von Null verschieden sein.

Weitere Aussagen über die $q_n$ lassen sich gewinnen, wenn man z. B. bestimmte Forderungen bezüglich des Potentialverlaufs stellt. Als Beispiel soll der Fall $U \sim -1/r$, also NEWTONsches Potential für große $r$, behandelt werden.

Zunächst eine Bemerkung zum Einfluß von $\lambda$ und $\nu$ auf die Lösungen von $\Phi$: Bezieht man $r$ auf eine geeignete Länge $l_0$, so ist wegen des Verschwindens von $\lambda'$ und $\nu'$ für $r \to 0$

$$\frac{2}{r} \gg \frac{\nu' - \lambda'}{2}, \quad r \ll l_0\,. \tag{2.14}$$

Verschwindet andererseits $\Phi$ mindestens wie $r^{-1}$ für $r \to \infty$, so verschwinden $\lambda'$ und $\nu'$ wie $r^{-2}$. Es gilt daher auch

$$\frac{2}{r} \gg \frac{\nu' - \lambda'}{2}, \quad r \gg l_0\,. \tag{2.15}$$

Setzt man für $r \gtrless l_0$ noch $e^{-\lambda} \approx 1$, so gilt also die Näherung

$$\begin{aligned} \Phi'' + \Phi'\left(\frac{2}{r} + \frac{\nu' - \lambda'}{2}\right) - \frac{1}{2} e^{\lambda} \frac{dF}{d\Phi} \\ \approx \Phi'' + \frac{2}{r}\,\Phi' - \frac{1}{2}\frac{dF}{d\Phi} = 0\,, \quad r \gtrless l_0\,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

[6] J. L. SYNGE, Relativity, the General Theory, North Holland Publishing Co., Amsterdam 1960.

Für große $r$ gilt nun für die Energiedichte näherungsweise

$$\varrho = \tfrac{1}{2}(\Phi'^2 + F) \tag{2.17}$$

und für das Potential

$$U = \int_{\infty}^{r} \varrho\, r^2\, \mathrm{d}r\,. \tag{2.18}$$

Aus der KLEIN-GORDON-Gleichung und dem Ausdruck für $\varrho$ folgte durch Umformung und Integration

$$\Phi'^2 = \varrho - \frac{2}{r^2} \int_{\infty}^{r} \varrho\, r\, \mathrm{d}r\,, \tag{2.19}$$

$$F = \varrho + \frac{2}{r^2} \int_{\infty}^{r} \varrho\, r\, \mathrm{d}r\,. \tag{2.20}$$

Fordert man für große $r$

$$U = -\sum_{n=1} \frac{b_{n+1}}{n\, r^n}\,, \tag{2.21}$$

so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich [7]

$$\Phi = \frac{\sqrt{2\, b_2}}{r} \left(1 + \frac{5\, b_3}{12\, b_2\, r} + \dots\right), \tag{2.22}$$

$$F = \frac{b_3}{r^5} + \frac{b_4}{r^6} + \dots\,. \tag{2.23}$$

Damit diese Beziehungen mit dem Ansatz für $F$ [s. Gl. (2.9)] verträglich sind, muß aber sein

$$b_3 = 0; \qquad q_1 = 0\,. \tag{2.24}$$

Somit folgt – $b_4 \neq 0$ vorausgesetzt –

$$F = \tfrac{1}{3} q_2\, \Phi^6 + O(\Phi^8)\,. \tag{2.25}$$

Über das Vorzeichen von $q_2$ läßt sich folgendes sagen: Nimmt man einmal an, daß $F = \frac{1}{3}\, q_2\, \Phi^6$ exakt gilt, so hat die (2.16) entsprechende angenäherte Gleichung

$$\Phi'' + \frac{2}{r} \Phi' - q_2\, \Phi^5 = 0 \tag{2.26}$$

die Lösung

$$\Phi = \frac{C_0}{\sqrt{-\frac{1}{3}\, q_2\, C_0{}^4 + r^2}}\,; \quad C_0 = \text{const}\,. \tag{2.27}$$

Damit diese Lösung nichtsingulär ist, muß notwendigerweise $q_2 < 0$ sein. Es sei bemerkt, daß zu dieser Lösung eine Energiedichte

$$\varrho = \frac{C_0{}^2 (r^2 - C^2\, l_0{}^2)}{2 (C^2\, l_0{}^2 + r^2)^3}\,; \; C^2\, l_0{}^2 = \tfrac{1}{3} q\, C_0{}^4; \; q = -q_2 > 0\,, \tag{2.28}$$

gehört, die offenbar für $0 \leqq r \leqq C\, l_0$ negativ ist. Die Gesamtenergie ist jedoch in dieser Näherung (d. h. ohne den „Gravitationsanteil") positiv:

$$E \sim \int_0^{\infty} \varrho\, r^2\, \mathrm{d}r = \frac{\pi}{16} \sqrt{\frac{3}{q}}\,. \tag{2.29}$$

Nimmt man in $F$ noch höhere Potenzen hinzu, so kann, wie sich zeigen läßt, die Lösung in Potenzen nach dem durch (2.27) gegebenen Ausdruck entwickelt werden. Konvergiert diese Entwicklung im Nullpunkt, so konvergiert sie – $q_2 < 0$ vorausgesetzt – dann für alle $r$. Die Konvergenz im Nullpunkt ist im Rahmen der bisher gemachten Annahmen aber gegeben, wenn

$$F(\Phi_{\text{Max}} = \Phi(0)) = \sum \frac{q_n}{n+1}$$

existiert. Neben den Bedingungen (2.13) haben wir im Falle $U \sim -1/r$ also noch die Forderung $q_1 = 0$, $q_2 < 0$. Wie man leicht erkennt, kommt man in diesem Fall nicht mit 2 Gliedern aus, sondern benötigt mindestens 3 Glieder. Beschränkt man sich auf diese 3 Glieder, d. h., setzt man

$$F = \sum_{n=2}^{5} \frac{q_n}{n+1}\, \Phi^{2n+2}\,, \tag{2.30}$$

so müssen für die Koeffizienten folgende Ungleichungen erfüllt sein:

$$\tfrac{3}{5} q_4 < q_2 < 0 < q_3;\; q_2 + q_4 < -q_3 < \tfrac{4}{3} q_2 + \tfrac{4}{5} q_4\,. \tag{2.31}$$

Zum Begriff „Teilchenradius" ist folgendes zu sagen: Die Glieder mit $\lambda$ und $\nu$ treten, wie bereits bemerkt, erst dort merkbar in Erscheinung, wo

$$2/r \sim (\nu' - \lambda')/2 \tag{2.32}$$

ist; d. h., für $r \sim l_0$. Da $\lambda'$ und $\nu'$ für $r \to 0, \infty$ verschwinden, so müssen sie ihre größten Werte im Bereich $r \sim l_0$ annehmen. Folglich wird die Bahn eines Teilchens (geodät. Linie), das auf die Umgebung des Punktes $r = 0$, der dem Zentrum eines dort ruhenden Teilchens entspricht, zuläuft, im Bereich $r \sim l_0$ am stärksten verändert: Es entsteht die Vorstellung, das ankommende Teilchen sei von einem räumlich ausgedehnten Teilchen mit einem Radius der Größenordnung $l_0$ abgelenkt worden.

## 3. Konform-ebene Metrik

Die Feldgleichungen für eine derartige Metrik sind von Bedeutung für die Diskussion kosmologischer Probleme. Das Quadrat des Linienelementes habe folgende Gestalt:

$$\mathrm{d}s^2 = e^{f(r,t)}\, \mathrm{d}r^2 - c^2\, \mathrm{d}t^2. \tag{3.1}$$

[7] Bemerkenswert ist der Umstand, daß sich nur mit $b_2 > 0$ eine reelle Lösung für $\Phi$ ergibt, d. h. für den Fall, daß die Kraft für große $r$ anziehend ist.

In der EINSTEINschen Theorie wird gewöhnlich

$$f(r,t)=\chi(t)-\log(1+a\,r^2)\,;\quad a=\text{const}\,,\tag{3.2}$$

gesetzt; dem entspricht eine definite Metrik konstanter Krümmung im Räumlichen für jeweils ein festes $\chi$. Bei der Bestimmung von $\chi$ besteht eine gewisse Willkür, deren Ursache darin liegt, daß in den EINSTEINschen Gln. die Dichte als Funktion von Ort und Zeit nicht durch die Feldgln. gegeben ist. Im vorliegenden Falle muß dagegen die Dichte und damit auch die Funktion $f(r,t)$ aus den Feldgln. bestimmt werden, so daß a priori nicht sicher ist, ob sich $f(r,t)$ in der Form (3.2) ansetzen läßt. In der Tat zeigt eine Untersuchung der Feldgln., daß der Ansatz (3.2) nicht sinnvoll ist. Um überhaupt eine hinreichende Zahl von Gln. entsprechend der Zahl der zu bestimmenden Größen zu erhalten, muß das Quadrat des Linienelementes im einfachsten Falle die folgende Form haben:

$$\mathrm{d}s^2=e^{\chi(t)}\,\mathrm{d}r^2-c^2\,\mathrm{d}t^2\,.\tag{3.3}$$

Dieser Fall soll im folgenden betrachtet werden.

Die (3.3) entsprechenden Feldgln. haben folgende Gestalt:

$$\ddot\chi+\frac{3}{4}\dot\chi^2+\frac{1}{2}(\dot\Phi^2-F)=0\,,\quad \dot\Phi=\frac{\mathrm{d}\Phi}{c\,\mathrm{d}t}\quad\text{usw.,}\tag{3.4}$$

$$\frac{3}{4}\dot\chi^2-\frac{1}{2}(\dot\Phi^2+F)=0\,.\tag{3.5}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt unmittelbar

$$\dot\chi=\pm\sqrt{\tfrac{2}{3}(\dot\Phi^2+F)}\,.\tag{3.6}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel ist – von einem konstanten Faktor abgesehen – die Energiedichte. Die Forderung, daß diese Größe positiv sei, ist daher zugleich eine Bedingung für die Realität der Lösungen für $\dot\chi$ [8]. Subtraktion der Gl. (3.5) von (3.4) liefert

$$\ddot\chi=-\dot\Phi^2\,.\tag{3.7}$$

Man erkennt aus dieser Beziehung folgendes: Wählt man in (3.6) das positive Vorzeichen der Wurzel, so verlaufen sämtliche Lösungen für $\chi$ mit wachsendem $t$ monoton zunehmend und konvex; d. h., es findet in jedem Falle eine Expansion statt.

Zwischen $\chi$ und $F$ besteht ein enger Zusammenhang, der sich auf folgende Weise darstellen läßt:

[8] Man muß beachten, daß hier von der Annahme kontinuierlich verteilter Materie mit einer mittleren, räumlich konstanten, positiven Energiedichte ausgegangen wird.

Setzt man

$$\dot\chi=G\,,\tag{3.8}$$

so erhält man durch Elimination von $\dot\Phi^2$ zunächst

$$\dot G-\frac{3}{2}G^2-F=0\,.\tag{3.9}$$

Da $F$ nach Voraussetzung ein Funktional von $\Phi$ ist, so kann man $\Phi$ als unabhängige Variable einführen. Mit

$$\dot G=\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\Phi}\,\dot\Phi=\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\Phi}\sqrt{\tfrac{3}{2}G^2-F}\tag{3.10}$$

folgt dann aus (3.9) die Gleichung

$$(\mathrm{d}G/\mathrm{d}\Phi)^2-\tfrac{3}{2}G^2+F=0;\tag{3.11}$$

sie ersetzt zusammen mit der aus (3.7) und (3.8) folgenden Gleichung,

$$\mathrm{d}G/\mathrm{d}\Phi=-\dot\Phi\tag{3.12}$$

die Gln. (3.4) und (3.5) bzw. (3.6) und (3.7).

Schließlich ist es noch möglich, die Gln. (3.4) und (3.5) so zu entkoppeln, daß eine Dgl. für $\Phi$ entsteht:

$$\ddot\Phi+\dot\Phi\sqrt{\tfrac{3}{2}(\dot\Phi^2+F)}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\Phi}=0;\tag{3.13}$$

sie entspricht der KLEIN-GORDON-Gleichung für den vorliegenden Fall [9].

Abschließend soll untersucht werden, welchen Einfluß die im vorangegangenen Abschnitt aufgestellte Forderung, $F\sim-\Phi^6$ für $\Phi^2\ll1$ auf die Gestalt der Lösung für $\chi$ hat. Wir beschränken uns dabei auf das Verhalten für große $t$ unter der Annahme, daß $\Phi$ für $t\to\infty$ verschwindet. Aus (3.11) folgt zunächst mit $F=-\frac{1}{3}q\,\Phi^6+O(\Phi^8)$, $q>0$,

$$G=\sqrt{q/48}\;\Phi^4+O(\Phi^6)\,.\tag{3.14}$$

Für das asymptotische Verhalten von $\Phi$ und $\chi$ ergibt sich damit aus (3.12) und (3.8):

$$\Phi\sim a/\sqrt{t};\quad a=(\tfrac{3}{4}q\,c^2)^{1/4}\,,\tag{3.15}$$

$$\chi\sim\chi_0-\frac{a^2/8}{t}\,;\tag{3.16}$$

$\chi_0$ ist eine Integrationskonstante. Der Lösung für $\chi$ ist zu entnehmen, daß die Expansion nicht unbegrenzt ist: Der Abstand zweier Punkte strebt asymptotisch einem festen endlichen Wert zu, die Expansion wird schwächer.

[9] Nicht alle Lösungen von (3.13) sind zugleich Lösungen der Feldgln. Zum Beispiel hat (3.13) für $F=-\frac{1}{3}\,q\,\Phi^6$, $q>0$, die Lösung $\Phi=A\,t^{-1/2}$, wobei $A^5-(\frac{3}{4}\,q)\,A=0$ gilt. Die nichttriviale Lösung mit $A^4=(\frac{3}{4}\,q)$ ist jedoch nicht brauchbar, da sie in den Gln. (3.4) und (3.5) auf $\chi=0$ und damit auf $\Phi=$const, also auf einen Widerspruch führt.

## 4. Schluß

Bei weiteren Untersuchungen wird man das skalare Weltfeld durch ein Spinorfeld, die klassischen Größen durch entsprechende Operatoren ersetzen müssen. Die in den Gln. auftretenden starken Nichtlinearitäten bilden bekanntlich ein erhebliches Problem für die Quantelung [1], doch ist wenigstens zu hoffen, daß die Darstellung der metrischen Größen als Funktionale des Weltfeldes zu einer einheitlichen Behandlung führt. Die Begriffe „Gravitationsfeld" und „Quantelung des Gravitationsfeldes" haben in der hier vertretenen Auffassung, nach der es nur *ein* Feld, nämlich das Weltfeld gibt, keinen Sinn. Die metrische resp. topologische Struktur des Raumes ist eine Erscheinungssform des Weltfeldes; sie wird von ihm gewissermaßen induziert. Die Quantelung dieses Feldes gibt der Struktur des Raumes einen statistischen Charakter. Eine Reihe von Problemen wird man jedoch vielleicht zunächst am Modell eines klassischen Feldes diskutieren können. Dazu gehören u. a.:

a) Die Frage nach den Grundkonstanten. Das sind primär die in dem Ansatz für $F$ auftretenden Konstanten $q_n$. Es drängt sich hier die Frage auf, ob nicht die ursprünglich scheinbare Vielzahl von Feldern (Teilchen) – hier als Erscheinungsformen *eines* Weltfeldes angenommen – ihren Ausdruck in den Konstanten $q_n$ findet, über deren Anzahl keine Voraussetzung gemacht wurde.

b) Zusammenhang mit kosmologischen Problemen: Ist z. B. ein Massenspektrum von Teilchen von der Struktur der Welt im Großen abhängig? Das folgende Beispiel mag zur Illustration dieser Frage dienen: Wir suchen periodische Lösungen

$$\Phi = \Phi(\sigma)\,; \qquad \mathrm{d}\sigma = k_a\,\mathrm{d}x^a\,, \tag{4.1}$$

wobei wir näherungsweise annehmen

$$k_a = \text{const}\,, \quad g^{ab}\,\Phi_{;\,ab} - \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\Phi} \approx \delta^{ab}\,\Phi_{;\,ab} - \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\Phi} = 0\,. \tag{4.2}$$

Betrachten wir hier wieder den Fall

$$F = -\tfrac{1}{3} q\,\Phi^6, \quad q > 0\,, \tag{4.2}$$

so hat die entsprechende Gleichung

$$k^2\,\Phi'' + q\,\Phi^5 = 0\,; \quad \Phi' = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\sigma}\ \text{usw.}\,; \quad k^2 = \delta^{ab}\,k_a\,k_b\,, \tag{4.3}$$

stetige periodische Lösungen von der Form

$$\Phi(\sigma) = \sqrt{\frac{1-\operatorname{cn} S}{a+b\operatorname{cn} S}}\,; \quad S = \text{const}\cdot\sigma\,; \ a, b = \text{const}\,. \tag{4.4}$$

Nimmt man ein endliches, in sich geschlossenes Weltall mit einem Umfang $L$ an, so liegt es nahe zu fordern

$$\Phi(0) = \Phi(L)\,. \tag{4.5}$$

(Es werden gewissermaßen nur „stehende Wellen" betrachtet.) Wegen der Periodizität der Lösungen kann man nun die Energie in ein diskretes Spektrum zerlegen und auf diese Weise ein „Massenspektrum" konstruieren [3], in das die Größe $L$ wegen der Randbedingung (4.5) eingeht.

c) Das Verhalten der klassischen Lösungen von $\Phi$ auf dem Lichtkegel ist bekanntlich von Bedeutung für die Konstruktion der Kommutatorfunktion [10]. Es ist möglich, daß die allgemein-kovariante Formulierung eine Modifikation der speziell-kovarianten (Lorentz-invarianten) Lösung bringt. Treten z. B. für $\Phi$ Lösungen vom Typ $\Phi \sim f(1/q)$ auf, wo $f$ eine periodische Funktion ihres Argumentes ist, so werden $\Phi$ und damit auch $g_{mn} = g_{mn}(\Phi)$ für $q \to 0$ unbestimmt. Das heißt: Der Abstand zweier Punkte, der durch die metrische Fundamentalform

$$\mathrm{d}s^2 = g_{mn}\,\mathrm{d}x^m\,\mathrm{d}x^n$$

gegeben ist, wird für $q \to 0$ unbestimmt. Ein solches Verhalten könnte mit $q = q(c^2\,t^2 - r^2)$ auf dem Lichtkegel auftreten.

[10] H. P. Dürr, W. Heisenberg, H. Mitter, S. Schlieder u. K. Yamazaki, Z. Naturforschg. **14 a**, 441 [1959].